Über
parabolische Coordinaten und die geodätischen Linien auf dem elliptischen Paraboloid.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

der hohen philosophischen Facultät zu Marburg

vorgelegt von

Ferdinand Groscurth

aus Unterhaun.

MARBURG.

1887.

Das Problem der kürzeſten (geodätiſchen) Linien auf Oberflächen iſt öfter der Gegenſtand der Unterſuchung hervorragender Mathematiker geweſen. In erſter Linie kamen hierbei die Rotationsflächen und darunter wieder die Kugel und das elliptiſche Sphäroid wegen ihrer nahen Beziehung zur Geſtalt der Erde in Frage. Später dehnte man die Unterſuchungen auch auf das dreiaxige Ellipſoid aus, zumal als man aus Gradmeſſungen ſchlieſsen zu müſſen glaubte, daſs die Erde kein Sphäroid, ſondern ein dreiaxiges Ellipſoid ſei. Jacobi gelang es zuerſt, die Differentialgleichung der kürzeſten Linien auf der letzteren Oberfläche auf eine Quadratur zurückzuführen (Crelle's Journal, Bd. 19; Vorlesungen über Dynamik). Er benutzte dazu die zuerſt von Euler in der Ebene und ſpäter von Legendre auf den Raum angewandten elliptiſchen Coordinaten und erleichterte die weitere Durchführung nicht unweſentlich durch Zurückführung der totalen Differentialgleichung auf eine partielle. Auf andere Oberflächen 2. Ordnung iſt unſeres Wiſſens das Problem noch nicht ausgedehnt worden. Was die beiden Hyperboloide zunächſt anlangt, ſo läſst ſich für dieſelben die Gleichung der geodätiſchen Linien, da elliptiſche Coordinaten auch hier anwendbar ſind, und es hauptſächlich nur einer Vertauſchung der Variabelen bedarf, ohne Schwierigkeit finden.

Anders dagegen verhält es ſich mit dem elliptiſchen und dem hyperboliſchen Paraboloid. Hier läſst ſich zwar, wenn die Gleichung der Oberfläche in rechtwinkeligen Coordinaten gegeben iſt, in der betreffenden Differentialgleichung das Differential der in der gegebenen Gleichung auf der erſten Potenz vorkommenden Variabelen mit Leichtigkeit eliminieren, wodurch man eine Differentialgleichung zwiſchen den beiden anderen Variabelen allein erhält; jedoch iſt es nicht möglich, eine Trennung derſelben zu bewerkſtelligen. Elliptiſche Coordinaten führen auch keine Vereinfachung herbei. Um zu einer Quadratur zu gelangen, hat man vielmehr neue Coordinaten einzuführen, welche wir der Benennung „elliptiſche Coordinaten" entſprechend als paraboliſche Coordinaten bezeichnen und zunächſt behandeln wollen.

I. Parabolische Coordinaten.

Iſt

$$y^2 = 2pX$$

die Scheitelgleichung einer Parabel in rechtwinkeligen Coordinaten, ſo lautet dieſelbe auf ein paralleles Coordinatenſyſtem und den Brennpunkt als Anfangspunkt bezogen

$$y^2 = 2p\left(\frac{p}{2} + x\right)$$

oder

$$y^2 = 2px + p^2,$$

wofür man auch ſchreiben kann

$$1) \quad F_1 \equiv \frac{y^2}{p^2} - \frac{2x}{p} - 1 = 0.$$

dagegen ist

$$2) \quad F_2 \equiv \frac{y^2}{q^2} + \frac{2x}{q} - 1 = 0$$

die auf dasselbe System bezogene Gleichung einer entgegengesetzt liegenden Parabel mit dem Parameter 2q, welche dieselbe Hauptaxe und denselben Brennpunkt hat. Wir wollen diese letztere zum Unterschied von der ersteren kurz als eine negative Parabel, Parabeln aber, welche dieselbe Hauptaxe und denselben Brennpunkt haben, als confocale Parabeln bezeichnen.

Der Durchschnittspunkt der Parabeln 1) und 2) hat die Coordinaten

$$x_0 = \frac{q-p}{2} \text{ u. } y_0 = \pm\sqrt{qp}.$$

Zieht man in diesem Punkt Tangenten an die beiden Curven, so ist, wenn man mit τ_1, τ_2 die Winkel bezeichnet, welche dieselben mit der x-Axe bilden

$$\operatorname{tg} \tau_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\left(\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}}{\frac{\partial F_1}{\partial y}}\right)_0 = -\frac{\frac{-2}{p}}{\frac{2y_0}{p^2}} = \frac{p}{y_0} = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}$$

$$\operatorname{tg} \tau_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\left(\frac{\frac{\partial F_2}{\partial x}}{\frac{\partial F_2}{\partial y}}\right)_0 = -\frac{\frac{2}{q}}{\frac{2y_0}{q^2}} = -\frac{q}{y_0} = \mp\sqrt{\frac{q}{p}}$$

Es ist also

$$\operatorname{tg} \tau_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \tau_2} = -\operatorname{ctg} \tau_2$$

d. h. die beiden Tangenten stehen auf einander senkrecht.

Da confocale Parabeln derselben Art sich nicht schneiden und da p und q zwei ganz beliebige Werte sind, können wir folgenden Satz aussprechen:

Confocale Parabeln derselben Art schneiden sich nicht in reellen Punkten, dagegen schneiden sich confocale Parabeln verschiedener Art stets in reellen Punkten senkrecht.

Die Gleichungen 1) und 2) können wir zusammenfassen in die Gleichung

$$3) \quad F \equiv \frac{y^2}{(p+\lambda)^2} - \frac{2x}{p+\lambda} - 1 = 0^*)$$

Lassen wir nämlich hierin λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, so erhalten wir alle Parabeln von demselben Brennpunkt und derselben Hauptaxe, und zwar stellt die Gleichung positive Parabeln dar, so lange λ in den Grenzen $+\infty$ und $-p$ bleibt, negative Parabeln dagegen, wenn λ zwischen $-p$ und $-\infty$ liegt.

Sind umgekehrt y und x gegeben, so ist die Gleichung 3) in Bezug auf λ vom 2. Grad, hat also zwei Wurzeln λ_2 und λ_1. Dass diese beiden Wurzeln reell sind, lehrt eine einfache Discussion. Es ist nämlich für $\lambda = -\infty$ $F = -1$; mit wachsendem λ wächst auch F, bis es für $\lambda = -p$ positiv unendlich wird. Lassen wir λ immer grösser werden, so nimmt F wieder ab, bleibt aber vorerst positiv und wird für $\lambda = +\infty$ wieder gleich -1. Es liegt also eine reelle

---

*) p könnte in dieser Gleichung auch $= 0$ gesetzt werden,

also $\quad F \equiv \frac{y^2}{\lambda^2} - \frac{2x}{\lambda} - 1 = 0$ oder auch $F \equiv \frac{y^2}{\lambda} - 2x - \lambda = 0$;

doch wollen wir aus Rücksicht auf die später folgende Gleichung für confocale Paraboloide diese Form beibehalten, obwohl sie die weitere Discussion etwas erschwert.

Wurzel λ_2 der Gleichung $F = 0$ zwiſchen $-\infty$ und $-p$ und die andere λ_1 zwiſchen $-p$ und $+\infty$. Erſtere repräſentiert eine negative, letztere eine poſitive Parabel. Es gehen alſo durch jeden Punkt der Ebene von einem Syſtem confocaler Parabeln immer nur zwei nach entgegengeſetzter Seite liegende Parabeln. Mithin iſt jeder Punkt der Ebene beſtimmt durch zwei ſich ſchneidende Parabeln, welche dieſelbe Hauptaxe und einen gegebenen Punkt als gemeinſchaftlichen Brennpunkt haben. Es ſchneiden ſich zwar die beiden Curven in zwei gegen die x-Axe ſymmetriſch liegenden Punkten; unter der Beſchränkung jedoch, daſs der Punkt z. B. nur auf der poſitiven Seite der x-Axe liegen ſoll, iſt er unzweideutig beſtimmt. Wir können alſo dieſe beiden Parabeln als die den Punkt beſtimmenden Coordinaten anſehen; den denſelben entſprechenden Werten λ_1 und λ_2 wird man füglich den Namen parabolifche Coordinaten geben können.

Setzt man $\lambda_1 =$ Conſt., ſo erhält man alle Punkte auf einer poſitiven Parabel, für $\lambda_2 =$ Conſt. aber alle Punkte auf einer negativen Parabel.

Die Beziehung zwiſchen y, x einer- und λ_1, λ_2 andererſeits wird ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$4)\quad \begin{aligned} \frac{y^2}{(p+\lambda_1)^2} - \frac{2x}{p+\lambda_1} - 1 &= 0 \\ \frac{y^2}{(p+\lambda_2)^2} - \frac{2x}{p+\lambda_2} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Um hieraus y und x zu beſtimmen, dividieren wir die erſtere dieſer beiden Gleichungen durch $(p+\lambda_2)^2$ und die zweite durch $(p+\lambda_1)^2$ und ſubtrahieren dann die erſte von der zweiten; es ergiebt ſich ſo:

$$2x\,(p+\lambda_1-p-\lambda_2) + (p+\lambda_1)^2 - (p+\lambda_2)^2 = 0$$

oder

$$2x\,(\lambda_1-\lambda_2) + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2p\,(\lambda_1-\lambda_2) = 0$$

woraus

$$5)\quad 2x = -(2p+\lambda_1+\lambda_2) = -[(p+\lambda_1)+(p+\lambda_2)].$$

Durch ähnliche Elimination findet ſich:

$$6)\quad y^2 = -(p+\lambda_1)(p+\lambda_2).$$

Dieſer letzere Ausdruck iſt poſitiv, da der erſte Factor negativ iſt, was ſchon a priori aus der Gleichſetzung mit einem Quadrat erkannt werden konnte.

Ebenſo leicht ergeben ſich die Differentiale dx und dy. Aus Formel 5) haben wir

$$2\,dx = -(d\lambda_1 + d\lambda_2)$$

und aus der Formel 6)

$$y = \sqrt{-(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)}$$

und

$$2\,dy = \frac{-(p+\lambda_1)\,d\lambda_2 - (p+\lambda_2)\,d\lambda_1}{\sqrt{-(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-(p+\lambda_1)}{p+\lambda_2}}\,d\lambda_2 - \sqrt{\frac{p+\lambda_2}{-(p+\lambda_1)}}\,d\lambda_1.$$

Hieraus finden wir für die vierfache Quadratſumme der Differentiale

$$7)\quad 4(dx^2+dy^2) = \left[1-\frac{p+\lambda_1}{p+\lambda_2}\right]d\lambda_2^2 + \left[1-\frac{p+\lambda_2}{p+\lambda_1}\right]d\lambda_1^2 + 2\,d\lambda_1\,d\lambda_2 - 2\,d\lambda_1\,d\lambda_2 =$$

$$= \frac{\lambda_1-\lambda_2}{p+\lambda_1}\,d\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{p+\lambda_2}\,d\lambda_2^2.$$

Setzen wir hierin $\lambda_1 =$ Conſt, alſo $d\lambda_1 = 0$, ſo bezieht ſich die Formel auf das Bogenelement der poſitiven Parabel, für $\lambda_2 =$ Conſt hingegen auf das Curvenelement der negativen Parabel. Wir erhalten alſo

$$8)\quad \begin{aligned} 4\,ds_1^2 &= \frac{\lambda_2-\lambda_1}{p+\lambda_2}\,d\lambda_2^2 \\ 4\,ds_2^2 &= \frac{\lambda_1-\lambda_2}{p+\lambda_1}\,d\lambda_1^2. \end{aligned}$$

Die Länge s_1 des Bogens der positiven Parabel z. B., begrenzt von den beiden negativen Parabeln, welche den Coordinaten $\lambda_2 = -l_2^0$ und $\lambda_2 = -l_2^1$ entsprechen, läßt sich dann folgendermaßen darstellen:

$$9)\quad s_1 = \frac{1}{2}\int_{-l_2^0}^{-l_2^1} \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{p+\lambda_2}}\,d\lambda_2.$$

Nimmt man $\lambda_2 = -p$ als obere Grenze, dann erhält man die Hälfte des von der Parabel $\lambda_2 = l_2^1$ begrenzten vollständigen Parabelbogens; demnach ist also

$$10)\quad S_1 = \int_{-l_2^0}^{-p} \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{p+\lambda_2}}\,d\lambda_2.$$

Für die negative Parabel würde sich ergeben

$$11)\quad S_2 = \int_{-p}^{-l_1^1} \sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{p+\lambda_1}}\,d\lambda_1,$$

wobei die der Coordinate $\lambda_1 = l_1^1$ entsprechende positive Parabel die Grenze bildet. — Vorstehende beide Intregale lassen sich nach den elementaren Regeln der Intregalrechnung leicht berechnen.

Da in jedem Punkt die beiden Parabeln aufeinander senkrecht stehen, ist das Flächenelement

$$12)\quad dJ = ds_1\,ds_2 = \frac{1}{4}\,\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{-(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)}}\,d\lambda_1\,d\lambda_2.$$

Durch doppelte Integration und Ausdehnung der Grenzen über alle von der gegebenen positiven Parabel, deren Coordinate λ_1^0 sei, eingeschlossenen confocalen Parabeln und über alle zwischen den Werten $\lambda = -p$ und $\lambda = -l_2^0$ liegenden negativen Parabeln erhalten wir die Hälfte eines begrenzten Flächenstücks unserer Curve, und somit ist

$$13.\quad J = \frac{1}{2}\int_{-l_2^0}^{-p}\int_{-p}^{\lambda_1^0} \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{-(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)}}\,d\lambda_1\,d\lambda_2$$

Die soeben für die Ebene besprochenen paraboliſchen Coordinaten gestatten ebenso wie die elliptischen Coordinaten eine Ausdehnung auf den Raum; den confocalen Parabeln entsprechen dann confocale Paraboloide, wobei wir an die Definition der confocalen Oberflächen 2. Ordnung im allgemeinen zu denken haben. Hiernach sind nämlich confocale Oberflächen 2. Ordnung solche, deren Hauptschnitte confocale Kegelschnitte sind. Wir haben zunächst die Gleichung der confocalen Paraboloide aufzustellen.

Es sei

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2X}{a}=0;\quad b>c$$

die auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Gleichung eines elliptischen Paraboloids, das wir, da es nach der positiven Seite geöffnet ist, als ein positives bezeichnen wollen.

Verlegt man das Coordinatensystem mit sich parallel in den Brennpunkt des Hauptschnitts der xy-Ebene, setzt man also $X = x + \frac{b^2}{2a}$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{2x}{a} - \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

welcher man auch, wenn man ſie durch $\frac{b^2}{a^2}$ dividiert und dann

$$\frac{b^2}{a} = p;\ \frac{c^2}{a} = q;\ p > q$$

ſetzt, die folgende Form geben kann:

$$14)\quad \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{pq} - \frac{2x}{p} - 1 = 0.$$

Das Syſtem der dieſem Paraboloid confocalen Paraboloide läſst ſich darſtellen durch die Gleichung

$$15)\quad \frac{y^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda)(q+\lambda)} - \frac{2x}{p+\lambda} - 1 = 0^*)$$

Setzen wir hierin nämlich $z = 0$, ſo erhalten wir eine Gleichung zwiſchen y und x, welche ſämtliche durch die xy-Ebene hervorgebrachten Hauptſchnitte umfaſst, nämlich die Gleichung

$$\frac{y^2}{(p+\lambda)^2} - \frac{2x}{p+\lambda} - 1 = 0$$

Dieſelbe ſtellt nach Gleichung 3) des erſten Abſchnitts ein Syſtem confocaler Parabeln dar.

Setzt man umgekehrt $y = 0$, dann erhält man als Gleichung der Schnittcurven der xz-Ebene

$$\frac{z^2}{(p+\lambda)(q+\lambda)} - \frac{2x}{p+\lambda} - 1 = 0.$$

Dieſe Gleichung bezieht ſich auf ein Coordinatenſyſtem, deſſen Anfangspunkt im Brennpunkt des Hauptſchnitts des Paraboloids 14) mit der xy-Ebene liegt; will man den Brennpunkt der Parabel, in welcher die xz-Ebene das Paraboloid 14) ſchneidet, als Anfangspunkt nehmen, dann hat man $x = x_1 - \frac{p-q}{2}$ zu ſetzen, wodurch man erhält

$$\frac{z^2}{(p+\lambda)(q+\lambda)} - \frac{2x_1}{p+\lambda} + \frac{p-q}{p+\lambda} - 1 = 0,$$

oder nach Multiplication mit $p+\lambda$ und Diviſion durch $q+\lambda$

$$\frac{z^2}{(q+\lambda)^2} - \frac{2x_1}{q+\lambda} - 1 = 0,$$

welche Gleichung wieder eine Schar confocaler Parabeln darſtellt.

Laſſen wir in Glchg. 15) λ alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ annehmen, ſo erhalten wir das vollſtändige Syſtem der confocalen Oberflächen, und zwar ſind dieſes poſitive elliptiſche Paraboloide für alle Werte von λ zwiſchen $+\infty$ und $-q$, hyperboliſche Paraboloide für alle λ zwiſchen $-q$ und $-p$ und negative elliptiſche Paraboloide für alle Werte zwiſchen $-p$ und $-\infty$. Im erſten Fall ſind nämlich die Nenner ſämtlich poſitiv; im zweiten Fall iſt der zweite Nenner negativ, der erſte und dritte dagegen poſitiv; im dritten Fall endlich iſt der dritte Nenner negativ, während die beiden anderen poſitiv ſind.

Verfolgen wir dieſen Verlauf etwas eingehender, ſo bemerken wir, daſs das für $\lambda = +\infty$ unendlich groſse Parameter beſitzende poſitive elliptiſche Paraboloid immer mehr zuſammen-

---

*) Verlegt man den Coordinaten-Anfangspunkt auf der x-Axe, indem man $x = x - \frac{p}{2}$ ſetzt, dann erhält die obige Gleichung die ſymmetriſche Form

$$\frac{y^2}{p+\lambda} - \frac{z^2}{q+\lambda} - 2x - \lambda = 0.$$

In der Geſtalt 15) ſchlieſst ſich die Gleichung jedoch näher an die Form der confocalen Ellipſoide an.

ſchrumpft, bis ſchlieſslich für $\lambda = -q$ der Parameter der von der xz-Ebene ausgeſchnittenen Parabel verſchwindet und das Paraboloid zuſammenfällt mit der poſitiven Parabel

$$\frac{y^2}{(p-q)^2} - \frac{2x}{p-q} - 1 = 0.$$

Dieſe Fläche iſt die Grenze zwiſchen den poſitiven elliptiſchen Paraboloiden und den hyperboliſchen Paraboloiden. Das hyperboliſche Paraboloid in dieſer Grenze fällt zuſammen mit der xy-Ebene, aus welcher dieſe Parabel ausgeſchnitten iſt. — Nimmt λ weiter ab bis $-p$, ſo bildet der Teil der xz-Ebene, welcher übrig bleibt, wenn man die Fläche der Parabel

$$z^2 = -2(p-q)x,$$

deren Scheitel alſo im Coordinatenanfangspunkt liegt, davon hinweg denkt, die Grenze zwiſchen den hyperboliſchen und den negativen elliptiſchen Paraboloiden. Die Parabel ſelbſt repräſentiert das negative elliptiſche Paraboloid in dieſer Grenze. Die andere Grenze des letzteren wird dann wieder gebildet durch ein negatives elliptiſches Paraboloid mit unendlich groſsen Parametern.

Die hier in Frage kommenden hyperboliſchen Paraboloide liegen alle ſo, daſs ſie ihre convexe Seite nach der Seite der poſitiven x kehren, wobei ſie durch die xy-Ebene in zwei ſymmetriſch liegende Hälften geteilt werden. Die yz-Ebene ſchneidet sie in Hyperbeln, deren groſse Axen in die y-Axe fallen.

Nehmen wir jetzt an, es ſei ein Punkt xyz im Raum gegeben, und denken wir dieſe Gröſsen in Gleichung 15) ſubſtituiert, ſo ſind in ihr alle Beſtimmungsſtücke bis auf λ bekannt; in Bezug auf dieſes iſt dann aber die Gleichung vom dritten Grad und hat als ſolche 3 Wurzeln. Daſs dieſelben alle reell ſind, lehrt folgende Betrachtung.

Laſſen wir in der Gleichung 15)

$$\frac{y^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda)(q+\lambda)} - \frac{2x}{p+\lambda} - 1 = 0$$

λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, ſo haben wir zunächſt für $\lambda = -\infty$, wenn wir mit F die linke Seite bezeichnen, $F = -1$. Wächſt nun von da ab λ weiter, ſo wird der erſte und der zweite Bruch poſitiv, $\frac{2x}{p+\lambda}$ aber negativ. Je mehr λ zunimmt, je kleiner es alſo, abſolut genommen, wird, deſto kleiner werden die abſoluten Werte von $p+\lambda$ und $q+\lambda$, deſto gröſser werden alſo die drei Brüche, welche alle drei das poſitive Vorzeichen behalten. Es wird alſo F beſtändig wachſen, alle negativen Werte von -1 bis 0 und alle poſitiven Werte durchlaufen. Da $p > q$, wird λ zunächſt $-p$ erreichen, hierfür wird aber $F = +\infty$. Es folgt das ohne weiteres aus der Gleichung, wenn man aus den drei Brüchen $p+\lambda$ abſondert, alſo ſchreibt

$$\text{A)} \quad \frac{1}{p+\lambda}\left[\frac{y^2}{p+\lambda} + \frac{z^2}{q+\lambda} - 2x\right] - 1 = 0.$$

Für $\lambda = -p$ wird die Klammer ſowohl wie der gemeinſchaftliche Factor poſitiv unendlich. — Erteile ich nunmehr λ einen Wert, welcher um eine ſehr geringe Gröſse gröſser iſt als $-p$, ſo wird in der Klammer des Ausdrucks A) der Nenner des erſten Bruchs ſehr klein, der Bruch ſelbſt alſo ſehr groſs ſein; von den beiden andern Gliedern der Klammer, welche dann beide mit dem negativen Vorzeichen behaftet ſind, wird der Nenner des Bruches $\frac{z^2}{q+\lambda}$ im Verhältnis zu $p+\lambda$ ſehr groſs, der ganze Bruch alſo ſehr klein im Verhältnis zu $\frac{y^2}{p+\lambda}$ ſein. Auf jeden Fall wird die ganze Klammer für einen Wert $\lambda = -p+\varepsilon$, wo ε eine unendlich kleine Gröſse bedeutet, poſitiv ſein. F kehrt alſo aus dem poſitiven Unendlichen zurück, durchläuft ſehr raſch alle poſitiven Werte, wird 0 und durchläuft weiterhin alle negativen Werte. Je mehr ſich

nämlich λ dem Werte $-q$ nähert, deſto mehr tritt $\frac{y^2}{p+\lambda}$ gegen die beiden negativen Glieder der Klammer zurück, bis für $F = -q$ der Bruch $+\frac{z^2}{q+\lambda} = -\infty$, und ſomit F überhaupt, da das übrige nur endliche Gröſsen ſind, negativ unendlich wird. Gebe ich nun wieder λ einen ſehr kleinen Zuwachs, dann wird der Nenner $q+\lambda$ ſehr klein, $\frac{z^2}{q+\lambda}$ alſo ſehr groſs werden, und da von jetzt ab $\frac{y^2}{p+\lambda}$ und $\frac{z^2}{q+\lambda}$ poſitiv bleiben, wird F für $\lambda = -q+\varepsilon$, wo ε wieder eine der Null ſich nähernde kleine Gröſse bedeutet, poſitiv werden. Es macht alſo jetzt F einen Sprung von $-\infty$ nach $+\infty$. Da von da ab $p+\lambda$ und $q+\lambda$ immer gröſser, $\frac{y^2}{p+\lambda}$ und $\frac{z^2}{q+\lambda}$ alſo immer kleiner werden, nimmt F wieder ab, bis es für $\lambda = +\infty$ — 1 wird. — Während alſo λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, wächſt F von — 1 bis $+\infty$, nimmt von da ab bis $-\infty$, ſpringt über nach $+\infty$ und nimmt wieder ab bis — 1. Dabei iſt es dreimal durch die Null hindurchgegangen. Die Gleichung 15) hat alſo drei reelle Wurzeln, nämlich

$$\begin{array}{rl} \lambda_3 & \text{zwiſchen } -\infty \text{ und } -p \\ 16) \quad \lambda_2 & \quad\,, \quad -p \quad, \quad -q \\ \lambda_1 & \quad\,, \quad -q \quad, \quad +\infty \end{array}$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3.$$

Hiervon entſpricht λ_3 einem negativen elliptiſchen Paraboloid, λ_2 einem hyperboliſchen Paraboloid und λ_1 einem poſitiven elliptiſchen Paraboloid. — Von einem gegebenen Syſtem confocaler Paraboloide geht durch einen Punkt des Raumes alſo immer ein poſitives elliptiſches, ein hyperboliſches und ein negatives elliptiſches Paraboloid.

Durch Einſetzung der Werte λ_1, λ_2, λ_3 in die Gleichung 15) erhalten wir folgendes Syſtem identiſcher Gleichungen

$$17) \quad \begin{array}{l} \frac{y^2}{(p+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)} - \frac{2x}{p+\lambda_1} - 1 = 0 \\ \frac{y^2}{(p+\lambda_2)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)} - \frac{2x}{p+\lambda_2} - 1 = 0 \\ \frac{y^2}{(p+\lambda_3)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)} - \frac{2x}{p+\lambda_3} - 1 = 0 \end{array}$$

Vermittelſt dieſer Gleichungen iſt es möglich, die Carteſiſchen Coordinaten durch paraboliſche auszudrücken. Zu dieſem Behufe wollen wir zunächſt $2x$ und dann z^2 aus den 3 Gleichungen eliminieren. Um $2x$ aus der erſten und der zweiten Gleichung zu eliminieren, multiplicieren wir die erſte mit $p+\lambda_1$, die zweite mit $p+\lambda_2$ und ſubtrahieren dann die erſte von der zweiten. Dadurch erhalten wir

$$y^2\left(\frac{1}{p+\lambda_2} - \frac{1}{p+\lambda_1}\right) + z^2\left(\frac{1}{q+\lambda_2} - \frac{1}{q+\lambda_1}\right) = \lambda_2 - \lambda_1$$

oder, indem man die Glieder in den Klammern vereinigt,

$$y^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)} + z^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)} = \lambda_2 - \lambda_1,$$

alſo nach Fortſchaffung des allen Gliedern gemeinsamen Factors $\lambda_1 - \lambda_2$

$$18\alpha) \quad \frac{y^2}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)} + \frac{z^2}{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)} = -1.$$

Durch ähnliches Verfahren erhalten wir aus der zweiten und der dritten Gleichung die neue

$$18\beta) \quad \frac{y^2}{(p+\lambda_2)(p+\lambda_3)} + \frac{z^2}{(q+\lambda_2)(q+\lambda_3)} = -1.$$

Der Vollſtändigkeit halber fügen wir auch noch die weitere analoge Gleichung

$$18\gamma) \quad \frac{y^2}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_3)} + \frac{z^2}{(q+\lambda_1)(q+\lambda_3)} = -1$$

hinzu.

Aus zweien dieſer Ausdrücke 18) haben wir nunmehr z^2 zu eliminieren. Um es z. B. aus α) und β) fortzuſchaffen, multiplicieren wir α) mit $q+\lambda_1$, β) mit $q+\lambda_3$ und ſubtrahieren dann erſteres von letzterem. So kommt

$$\frac{y^2}{p+\lambda_2}\left[\frac{q+\lambda_3}{p+\lambda_3} - \frac{q+\lambda_1}{p+\lambda_1}\right] = q+\lambda_1 - (q+\lambda_3)$$

oder, mit Benutzung der Identität

$$\frac{q+\lambda_3}{p+\lambda_3} - \frac{q+\lambda_1}{p+\lambda_1} = \frac{(p-q)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_3)}$$

$$\frac{y^2}{p+\lambda_2} \cdot \frac{(p-q)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_3)} = \lambda_1 - \lambda_3,$$

woraus ſofort

$$y^2 = -\frac{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)(p+\lambda_3)}{p+q}$$

folgt.

Ebenſo erhalten wir aus 18α) und 18β), wenn wir die erſte mit $p+\lambda_1$, die zweite mit $p+\lambda_2$ multiplicieren und dann die erſte von der zweiten ſubtrahieren,

$$\frac{z^2}{q+\lambda_2}\left[\frac{p+\lambda_3}{q+\lambda_3} - \frac{p+\lambda_1}{q+\lambda_1}\right] = \lambda_1 - \lambda_3$$

oder nach Vereinigung der Glieder in der Klammer

$$\frac{z^2}{q+\lambda_2} \cdot \frac{(p-q)(\lambda_1-\lambda_3)}{(q+\lambda_1)(q+\lambda_3)} = \lambda_1 - \lambda_3,$$

woraus ſich

$$z^2 = \frac{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)(q+\lambda_3)}{p-q}$$

ergiebt. — Um nun ſchlieſslich noch $2x$ zu finden, hat man in eine der Gleichungen 17) z. B. in die erſte, nachdem man dieſelbe mit $p+\lambda_1$ multipliciert hat, die Werte für x^2 und für y^2 zu ſubſtituieren. Es findet ſich

$$-\frac{(p+\lambda_2)(p+\lambda_3)}{p-q} + \frac{(q+\lambda_2)(q+\lambda_3)}{p-q} - 2x - (p+\lambda_1) = 0$$

oder

$$2x = \frac{-(p+\lambda_2)(p+\lambda_3) + (q+\lambda_2)(q+\lambda_3) - (p+\lambda_1)(p-q)}{p-q} =$$

$$= \frac{-p^2 - p\lambda_2 - p\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3 + q^2 + q\lambda_2 + q\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 - p^2 - p\lambda_1 + pq + q\lambda_1}{p-q}$$

$$= \frac{1}{p-q}[-\lambda_1(p-q) - \lambda_2(p-q) - \lambda_3(p-q) - p(p-q) - (p-q)(p+q)]$$

$$= -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2p+q),$$

oder in anderer Zuſammenſtellung

$$2x = -[(p+\lambda_1)+(p+\lambda_2)+(q+\lambda_3)].$$

Wir haben nunmehr zur Überführung der rechtwinkeligen Coordinaten in paraboliſche folgende drei Gleichungen

$$19) \quad \begin{aligned} y^2 &= -\frac{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)(p+\lambda_3)}{p-q} \\ z^2 &= \frac{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)(q+\lambda_3)}{p-q} \\ 2x &= -[(p+\lambda_1)+(p+\lambda_2)+(q+\lambda_3)]. \end{aligned}$$

Diese Formeln lassen sich auch einfacher aus der in λ identischen Gleichung

$$19\alpha) \quad \frac{y^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda)(q+\lambda)} - \frac{2x}{p+\lambda} - 1 = \frac{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)}{(p+\lambda)^2\cdot(q+\lambda)}$$

gewinnen, wenn man λ nacheinander gleich $-p$, $-q$, ∞ setzt. Die beiden ersten Substitutionen ergeben sofort, nachdem man beiderseitig mit $(p+\lambda)^2$ bezw. $(p+\lambda)(q+\lambda)$ multipliciert hat, die Werte für y^2 und z^2. Substituiert man $\lambda = \infty$, nachdem man $2x$ von seinem Nenner durch Multiplication befreit hat, so erhält man rechts die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$, deren wahrer Wert sich durch zweimalige Differentiation des Zählers und des Nenners nach λ ergiebt. Man erhält nämlich aus

$$-2x = \frac{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)}{(p+\lambda)(q+\lambda)} + p + \lambda$$

oder

$$-2x = \frac{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda) + (p+\lambda)^2(q+\lambda)}{(p+\lambda)(q+\lambda)} = \frac{f(x)}{F(x)}$$

$$f'x = -(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda) - (\lambda_1-\lambda)(\lambda_3-\lambda) - (\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda) + 2(p+\lambda)(q+\lambda) + (p+\lambda)^2$$

$$f''x = -(\lambda_1-\lambda) + (\lambda_2-\lambda) + (\lambda_1-\lambda) + (\lambda_3-\lambda) + (\lambda_2-\lambda) + (\lambda_3-\lambda) + 2(p+\lambda) + 2(q+\lambda) + 2(p+\lambda) =$$

$$= 2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2p+q)$$

$$F'x = p+\lambda+q+\lambda = p+q+2\lambda$$

$$F''x = 2;$$

so dass der wahre Wert von $-2x$ für $x = \infty$ ist

$$-2x = \frac{f''x}{F''x} = \frac{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2p+q)}{2},$$

woraus

$$2x = -[(p+\lambda_1)+(p+\lambda_2)+(q+\lambda_3)]$$

folgt. —

Auf der rechten Seite der ersten Gleichung ist $p+\lambda_1$ und $p+\lambda_2$ positiv, $p+\lambda_3$ dagegen negativ, also ist, da $p-q$ einen positiven Wert hat, die ganze rechte Seite positiv; in dem zweiten Ausdruck ist $q+\lambda_1$ positiv, $q+\lambda_2$ und $q+\lambda_3$ hingegen negativ, mithin ist auch die ganze rechte Seite positiv. Da beide Ausdrücke Quadraten gleich sind, war dieses von vornherein einzusehen.

Da wir für unsere späteren Untersuchungen auch die Differentiale dy, dz, dx ausgedrückt durch die parabolischen Coordinaten brauchen, wollen wir dieselben auch hier entwickeln. Wir haben sofort

$$2\,dx = -(d\lambda_1 + d\lambda_2 + d\lambda_3)$$

Nehmen wir bei den beiden anderen Gleichungen zunächst beiderseitig den Logarithmus und differentiieren wir dann, so kommt

$$\frac{2\,dy}{y} = \frac{d\lambda_1}{p+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{p+\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{d\lambda_3}$$

$$\frac{2\,dz}{z} = \frac{d\lambda_1}{q+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{q+\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{q+\lambda_3}.$$

Es ergiebt sich also für die vierfache Summe der Quadrate der Differentiale

$$4(dx^2+dy^2+dz^2) = d\lambda_1^2\left[1+\frac{y^2}{(p+\lambda_1)^2}+\frac{z^2}{(q+\lambda_1)^2}\right] +$$

$$+ d\lambda_2^2\left[1+\frac{y^2}{(p+\lambda_2)^2}+\frac{z^2}{(q+\lambda_2)^2}\right] + d\lambda_3^2\left[1+\frac{y^2}{(p+\lambda_3)^2}+\frac{z^2}{(q+\lambda_3)^2}\right] +$$

$$+ 2\,d\lambda_1\,d\lambda_2\left[1 + \frac{y^2}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)} + \frac{z^2}{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)}\right] +$$
$$+ 2\,d\lambda_1\,d\lambda_3\left[1 + \frac{y^2}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_3)} + \frac{z^2}{(q+\lambda_1)(q+\lambda_3)}\right] +$$
$$+ 2\,d\lambda_2\,d\lambda_3\left[1 + \frac{y^2}{(p+\lambda_2)(p+\lambda_3)} + \frac{z^2}{(q+\lambda_2)(q+\lambda_3)}\right].$$

Hierin ſind nun nach den Gleichungen 18) die Coefficienten der doppelten Produkte der Differentiale alle $= 0$. — Die Coefficienten der Quadrate der Differentiale laſſen ſich mit Hilfe der Gleichungen 19) oder noch beſſer mit Hilfe der Identität 19a) beſtimmen, wenn man letztere nach λ differentiiert und dann $\lambda = \lambda_1$, bezw. $= \lambda_2$, bezw. $= \lambda_3$ ſetzt. So ergiebt ſich z. B. nach Multiplikation mit $(p+\lambda)$ beiderſeitig durch Differentiation

$$-\frac{y^2}{(p+\lambda)^2} - \frac{z^2}{(q+\lambda)^2} - 1 = -\frac{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_1)^2(q+\lambda_1)^2}$$
$$= -\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)},$$

da die übrigen Glieder verſchwinden; es iſt alſo

$$1 + \frac{y^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(q+\lambda)^2} = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)} = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)}.$$

Auf entſprechende Weiſe findet ſich

$$1 + \frac{y^2}{(p+\lambda_2)^2} + \frac{z^2}{(q+\lambda_2)^2} = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}$$

und

$$1 + \frac{y^2}{(p+\lambda_3)^2} + \frac{z^2}{(q+\lambda_3)^2} = \frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}.$$

Führen wir dieſe Werte in den Ausdruck für die vierfache Quadratſumme der Differentiale ein, dann erhalten wir ſchlieſslich

$$4(dx^2 + dy^2 + dz^2) =$$
$$20) \quad = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)}\,d\lambda_1^2 + \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}\,d\lambda_2^2 +$$
$$+ \frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}\,d\lambda_3^2.$$

Die Coefficienten von $d\lambda_1^2$, $d\lambda_2^2$ und $d\lambda_3^2$ ſind hierin poſitiv. In dem erſten ſind die Factoren des Zählers und des Nenners alle poſitiv, im zweiten iſt $\lambda_2 - \lambda_1$ und $q + \lambda_2$ negativ, während die beiden anderen Factoren poſitiv ſind; im letzten Coefficienten endlich ſind alle Factoren negativ.

Dividieren wir die Gleichung 18a) durch $(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)$, ſo erhalten wir

$$\frac{y^2}{(p+\lambda_1)^2(p+\lambda_2)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)} + \frac{1}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)} = 0$$

In dieſer Form hat die Gleichung eine geometriſche Bedeutung. Bezeichnen wir nämlich die linken Seiten der Glchgn. 17) mit F_1, F_2, F_3, ſo iſt vorſtehende Gleichung identiſch mit der folgenden:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$$

Da die hierin vorkommenden partiellen Differentialquotienten aber mit dem Richtungscoſinus der Normalen der Flächen F_1 und F_2 proportional ſind, ſo ſagt unſere Gleichung nichts anderes aus, als daſs die beiden Flächen auf einander ſenkrecht ſtehen. Ein entſprechendes Reſultat liefert die Betrachtung der beiden anderen Glchgn. 18).

Nach dem Dupin'ſchen Satz ſchneiden ſich drei Syſteme auf einander ſenkrechter Flächen immer in Krümmungslinien. — Wir können alſo den Satz ausſprechen:

Die durch jeden Punkt des Raumes gehenden drei confocalen Paraboloide ſchneiden einander rechtwinkelig und zwar iſt die Schnittcurve je zweier Paraboloide eine Krümmungscurve dieſer Oberflächen.

Die angeſtellten Unterſuchungen ſetzen uns nunmehr in den Stand, die Oberfläche und den Rauminhalt eines jeden Paraboloids, ſowie die Gleichung der Krümmungscurven auf einem ſolchen durch paraboliſche Coordinaten zu beſtimmen. Die in jedem Punkt des Raumes ſich ſchneidenden Krümmungslinien ſtehen ſelbſtverſtändlich auf einander ſenkrecht, da ſie ja die Schnittcurven der durch denſelben Punkt gehenden drei confocalen und ſich rechtwinkelig treffenden Paraboloide ſind. Auf einer jeden dieſer Oberflächen liegen alſo zwei ſich orthogonal ſchneidende Syſteme von Krümmungscurven. Dieſelben zerteilen demnach in ihrer unendlich nahen Aufeinanderfolge eine ſolche Fläche in unendlich kleine Rechtecke. Die Summe dieſer Rechtecke giebt den Flächeninhalt der Oberfläche. Das Raumelement dagegen iſt das Produkt aus den Bogenelementen der drei Krümmungscurven.

Setzen wir in dem Ausdruck 20) eine der drei elliptiſchen Coordinaten einer Conſtanten, ihr Differential alſo der Null gleich, ſo erhalten wir das Bogenelement einer Curve auf der dieſer Coordinate entſprechenden Oberfläche, für $\lambda_1 = \text{Conſt.}$, $d\lambda_1 = 0$ z. B. das Bogenelement einer Curve auf dem poſitiven elliptiſchen Paraboloid

$$\frac{y^2}{(p+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)} - \frac{2x}{p+\lambda_1} - 1 = 0;\ \lambda_1 = C.$$

Setzen wir dagegen zwei der Coordinaten $= 0$, ſo bezieht ſich der obige Ausdruck auf die Krümmungscurven; und zwar bezeichnet er z. B. das Bogenelement einer auf vorſtehendem Paraboloid liegenden Krümmungscurve des einen Syſtems, wenn man λ_1 und λ_2 Conſtanten gleich ſetzt, dagegen eine ſolche des anderen Syſtems, wenn λ_1 und λ_3 conſtant ſind.

Sonach erhalten wir für die Bogenelemente der Krümmungslinien auf dem poſitiven elliptiſchen Paraboloid $\lambda_1 = C$

$$da_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}\,d\lambda_3$$

$$da_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}}\,d\lambda_2$$

alſo für das Flächenelement dieſer Oberfläche

$$21)\quad dF = da_1 \cdot da_2 = \frac{\lambda_2-\lambda_3}{4}\,d\lambda_2\,d\lambda_3 \cdot \sqrt{-\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}.$$

Wenn man dieſen Ausdruck zweifach integriert und einmal als Grenzen die Grenzen von λ_2, alſo $-q$ und $-p$, und als andere Grenzen $\lambda_3 = -p$ und $\lambda_3 = -l_3^0$ nimmt, erhält man den vierten Teil einer paraboloidiſchen Kappe, welche von der der Coordinate $\lambda_3 = -l_3^0$ entſprechenden Durchſchnittslinie begrenzt wird. Alſo haben wir

$$F = \int_{-l_3^0}^{-p}\int_{-p}^{-q} (\lambda_2-\lambda_3)\,d\lambda_2\,d\lambda_3 \cdot \sqrt{-\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}.$$

Dieſes Doppelintegral läſst ſich aber in die Differenz der Produkte zweier einfacher Integrale zerlegen, nämlich folgendermaſsen:

$$22)\quad F = \int_{-p}^{-q} \lambda_2\,d\lambda_2 \cdot \sqrt{-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} \cdot \int_{-l_3^0}^{-p} d\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}} -$$

$$-\int_{-p}^{-q} d\lambda_2 \sqrt{-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} \cdot \int_{-l_3^0}^{-p} \lambda_3\, d\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}.$$

Da jedes dieſer Integrale wieder in zwei zerfällt, ſo ſind zur Berechnung von F im ganzen 8 Intregale aufzulösen, die ſich durch die bekannten Subſtitionen auf die Normalformen elliptiſcher Integrale zurückführen laſſen.

Wenn man im Ausdruck 22) als Integralgrenzen je zwei beliebige Werte von λ_2 und λ_3 nimmt, ſo erhält man ein Stück der Oberfläche, welches von zwei Krümmungslinien des einen und von zwei des anderen Syſtems begrenzt wird.

Das Körperelement ergiebt ſich, indem man das Produkt der beiden Elemente der Krümmungslinien auf dem poſitiven elliptiſchen Paraboloid mit dem Element der Durchſchnittslinie des hyperboliſchen und des negativen elliptiſchen Paraboloids multipliciert. Für letzteres findet ſich, wenn man in 20) λ_2 und λ_3 conſtant ſetzt,

$$da_3 = \tfrac{1}{2}\, d\lambda_1 \sqrt{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)}};$$

folglich iſt das Körperelement des elliptiſchen Paraboloids P

$$23)\quad dP = da_1\, da_2\, da_3 = \frac{1}{8} \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3}{\sqrt{-(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}$$

Der körperliche Inhalt des Paraboloids P, begrenzt von dem negativen elliptiſchen Paraboloid, welches durch $\lambda_3 = -l_3^0$ dargeſtellt wird, ergiebt ſich alſo in der Form

$$24)\quad P = \frac{1}{2} \int_{-l_3^0}^{-p} \int_{-p}^{-q} \int_{-q}^{\lambda_1} \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3}{\sqrt{-(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}.$$

Führt man hierin das Produkt des Zählers aus, ſo bemerkt man leicht, daſs ſich das dreifache Integral ohne weiteres in 6 Glieder zerlegen läſst, von denen jedes das Produkt dreier einfacher Integrale iſt. Man erhält ſo folgenden umfangreichen Ausdruck:

$$2P =$$

$$\int_{-q}^{\lambda_1} \frac{\lambda_1^2\, d\lambda_1}{\sqrt{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)}} \cdot \int_{-p}^{-q} \frac{\lambda_2\, d\lambda_2}{\sqrt{-(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} \cdot \int_{-l_3^0}^{-p} \frac{d\lambda_3}{\sqrt{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}} -$$

$$-\int_{-q}^{\lambda_1} \frac{\lambda_1^2\, d\lambda_1}{\sqrt{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)}} \cdot \int_{-p}^{-q} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{-(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} \cdot \int_{-l_3^0}^{-p} \frac{\lambda_3\, d\lambda_3}{\sqrt{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}} -$$

$$-\int_{-q}^{\lambda_1} \frac{\lambda_1\, d\lambda_1}{\sqrt{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)}} \cdot \int_{-p}^{-q} \frac{\lambda_2^2\, d\lambda_2}{\sqrt{-(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} \cdot \int_{-l_3^0}^{-p} \frac{d\lambda_3}{\sqrt{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}} -$$

$$-\int_{-q}^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)}} \cdot \int_{-p}^{-q} \frac{\lambda_2^2\, d\lambda_2}{\sqrt{-(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} \cdot \int_{-l_3^0}^{-p} \frac{\lambda_3\, d\lambda_3}{\sqrt{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}} -$$

$$-\int_{-q}^{\lambda_1} \frac{\lambda_1\, d\lambda_1}{\sqrt{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)}} \cdot \int_{-p}^{-q} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{-(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} \cdot \int_{-l_3^0}^{-p} \frac{\lambda_3^2\, d\lambda_3}{\sqrt{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}} -$$

$$-\int_{-q}^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)}} \cdot \int_{-p}^{-q} \frac{\lambda_2\, d\lambda_2}{\sqrt{-(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} \cdot \int_{-l_3^2}^{-p} \frac{\lambda_3^2\, d\lambda_3}{\sqrt{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}.$$

Dieſes ſind lauter ſolche Integrale, deren Berechnung in den Elementen der Integralrechnung gelehrt wird.

Schlieſslich erübrigt es noch, die analytiſchen Daten für die Krümmungscurven zu geben. Als ihre Gleichungen ſtellen ſich zwei der Gleichungen

$$\lambda_1 = \text{Conſt},\ \lambda_2 = \text{Conſt},\ \lambda_3 = \text{Conſt}$$

dar, worin die Conſtanten innerhalb der in 16) angegebenen Grenzen zu wählen ſind. Für das poſitive elliptiſche Paraboloid würden dieſe Gleichungen ſein

$$\lambda_1 = \text{Conſt},\ \lambda_2 = \text{Conſt}$$

$$\text{oder } \lambda_1 = \text{Conſt},\ \lambda_3 = \text{Conſt},$$

je nachdem eine Curve des einen oder des andern Syſtems gemeint iſt.

Die Rectification der Krümmungslinien auf einer der confocalen Oberflächen läſst ſich nunmehr auch ohne Schwierigkeit bewerkſtelligen. Für unſere ſeither betrachtete Fläche $\lambda_1 = \text{Conſt}$ z. B. ſind die Bogenelemente zweier ſich ſchneidender Curven:

$$da_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}\, d\lambda_3$$

$$da_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}}\, d\lambda_2.$$

Hieraus erhält man durch Integration

$$a_1 = \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}\, d\lambda_3$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}}\, d\lambda_2,$$

wofür ſolche Gröſsen als Grenzen zu nehmen ſind, welche die möglichen Werte von λ_3 und λ_2 nicht überſchreiten. Beides ſind elliptiſche Integrale.

II. Die geodätischen Linien auf dem elliptischen Paraboloid.

In der Mechanik wird gezeigt, daſs ein materieller Punkt, welcher, nur einem anfänglichen Stoſs folgend, gezwungen iſt, auf einer gegebenen Oberfläche zu bleiben, auf derſelben eine kürzeſte Linie beſchreibt. Wir wollen von dieſer Beziehung Gebrauch machen, um die Differential-Gleichung der kürzeſten Linien auf dem elliptiſchen Paraboloid herzuleiten. Dabei wird uns die Benutzung der im erſten Teil behandelten paraboliſchen Coordinaten die Möglichkeit gewähren, dieſe Differential-Gleichung auf eine Quadratur zurückzuführen. Für die weitere Durchführung des Problems wollen wir denſelben Weg einſchlagen, auf welchem Jacobi die Integral-Gleichung der kürzeſten Linien auf dem dreiaxigen Ellipſoid gefunden hat.

Legen wir unſerer Unterſuchung das poſitive elliptiſche Paraboloid zu Grunde, und bezeichnen xyz die rechtwinkeligen Coordinaten des materiellen Punktes zu einer gewiſſen Zeit, ſo wird der Zwang, auf dem Paraboloid zu bleiben, ausgedrückt durch die Gleichung:

$$1) \quad \frac{y^2}{(p+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)} - \frac{2x}{p+\lambda_1} - 1 = 0$$

worin λ_1 als eine conſtante Gröſse zu betrachten iſt.

Nach dem Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt bekanntlich für die Bewegung eines materiellen Punktes, ſobald eine Kräftefunktion exiſtiert, d. h. ſobald ſich die Componenten der auf den Punkt wirkenden Kraft als partielle Differential-Quotienten einer Funktion U darſtellen laſſen, die Gleichung

$$T = \frac{mv^2}{2} = U + h$$

wo h eine Conſtante und T die lebendige Kraft bedeutet.

Da im vorliegenden Falle der Punkt ſich aber nur in Folge eines anfänglichen Stoſses bewegt und ſonſt keine Kraft auf ihn wirkt, so verſchwindet die Kräftefunktion U, und es wird

$$2) \quad T = \frac{mv^2}{2} = h,$$

oder, wenn wir der Einfachheit halber die Maſſeneinheit als Maſſe des Punktes, m alſo gleich 1 annehmen,

$$3) \quad 2T = v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2h.$$

Dieſe Differentialgleichung iſt nur dann integrierbar, wenn es gelingt, x y z als Funktionen zweier neuer Variabeln darzuſtellen. Hierzu verhelfen uns aber die paraboliſchen Coordinaten, und die Gleichungen 19) des vorigen Abſchnitts geben, wenn wir darin $\lambda_1 =$ Conſt ſetzen, x y z ausgedrückt durch λ_2 und λ_3. Führen wir dieſe Subſtitution aus, wobei uns der Ausdruck in 20) I. zu ſtatten kommt, ſo erhalten wir Gleichung 3) in der Form:

$$4) \quad 2T = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}\lambda_2'^2 + \frac{1}{4}\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}\lambda_3'^2 = 2h,$$

worin λ_2', λ_3' die nach t genommenen totalen Differentialquotienten von λ_2 und λ_3, alſo $= \frac{d\lambda_2}{dt}$ und $\frac{d\lambda_3}{dt}$ ſind.

Ein Integral dieſer Differentialgleichung erhalten wir, wenn wir dieſelbe, wie es Hamilton gelehrt hat, auf eine partielle Differentialgleichung zurückführen. Zu dem Ende haben wir zunächſt $\frac{\partial T}{\partial \lambda_2'}$ und $\frac{\partial T}{\partial \lambda_3'}$ zu bilden und dieſe beiden Ausdrücke dann den partiellen Differentialquotienten einer neuen Funktion W nach λ_2 und λ_3 gleich zu ſetzen. Wir erhalten:

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_2'} = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}\lambda_2' = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}$$
$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_3'} = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}\lambda_3' = \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}.$$

Hieraus ergiebt ſich

$$\lambda_2' = 4\frac{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}$$
$$\lambda_3' = 4\frac{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}.$$

Dieſe Werte liefern in 4) eingeſetzt:

$$5) \quad 2T = 4\frac{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 + 4\frac{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2 = 2h,$$

oder

$$6)\quad \frac{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2-\frac{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}{\lambda_3-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2=\frac{h}{2}(\lambda_2-\lambda_3)$$

Dieſe partielle Differentialgleichung zerfällt ohne weiteres in die beiden gewöhnlichen:

$$7)\quad \begin{aligned}\frac{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2&=\frac{h}{2}(\lambda_2+\beta)\\ \frac{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}{\lambda_3-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2&=\frac{h}{2}(\lambda_3+\beta),\end{aligned}$$

in welchen β eine neue Conſtante bedeutet, in Bezug auf welche man leicht bemerkt, daſs ſie zwiſchen $-\lambda_2$ und $-\lambda_3$ liegen muſs. In dem Coefficienten von $\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2$ iſt nämlich $(p+\lambda_2)$ poſitiv, $q+\lambda_2$ aber ebenſo wie der Nenner negativ; daher muſs der ganze Coefficient und damit auch $\frac{h}{2}(\lambda_2+\beta)$ poſitiv ſein. Dagegen iſt der Coefficient von $\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2$ negativ, denn die drei Glieder desſelben ſind negativ, mithin muss auch $\frac{h}{2}(\lambda_2+\beta)$ negativ ſein. Da nun $h =$ der lebendigen Kraft und dieſe als eine poſitive Gröſse aufzufaſſen iſt, kann es nicht negativ ſein. Wir haben alſo

$$\lambda_2+\beta>0;\ \lambda_3+\beta<0$$
$$\beta>-\lambda_2;\ \beta<-\lambda_3$$
$$\text{alſo } -\lambda_2<\beta<-\lambda_3.$$

Jede der Gleichungen 7) enthält nur eine unabhängige Variabele. Nach Trennung der Variabelen haben ſie die Form:

$$dW=\sqrt{\frac{h}{2}\frac{(\lambda_2+\beta)(\lambda_2-\lambda_1)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}}\,d\lambda_2$$
$$dW=\sqrt{\frac{h}{2}\frac{(\lambda_3+\beta)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}$$

und liefern durch Integration folgende vollſtändige Löſung:

$$8)\quad W=\sqrt{\frac{h}{2}}\left\{\int d\lambda_2\cdot\sqrt{\frac{(\lambda_2+\beta)(\lambda_2-\lambda_1)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}}+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3+\beta)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}}\right\}$$

Um hieraus die Integralgleichung der Differentialgleichung 4) zu finden, hat man W nach β partiell zu differentiieren und das Reſultat einer Conſtanten gleich zu ſetzen. Auf dieſe Weiſe findet man die Gleichung

$$\text{Conſt}=$$
$$9)\quad =\int d\lambda_2\cdot\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\lambda_2+\beta)(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}}+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)}{(\lambda_3+\beta)(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}},$$

welches die Gleichung der kürzeſten Linien auf dem elliptiſchen Paraboloid iſt. Die beiden elliptiſchen Integrale laſſen ſich leicht auf ſolche der erſten und zweiten Gattung zurückführen.

Um den Bogen s der kürzeſten Linien zu finden, benutzen wir die Formel der lebendigen Kraft

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=h,$$

woraus

$$ds=\sqrt{2h}\,.\,dt$$

und

$$10)\quad s=\sqrt{2h}\,(t-\tau),$$

wenn wir die Länge s von dem Punkte an rechnen, in welchem ſich der materielle Punkt zur Zeit τ befindet. Nun können wir aber

$$11)\quad t - \tau = \frac{1}{2h} \cdot W^*)$$

setzen. Dadurch wird $s = \frac{1}{\sqrt{2h}} \cdot W$ oder

$$12)\quad s = \frac{1}{2}\left\{ \int d\lambda_2 \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_2+\beta)(\lambda_2-\lambda_1)}{(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} + \int d\lambda_3 \sqrt{\frac{(\lambda_3+\beta)(\lambda_3-\lambda_1)}{(p+\lambda_3)(q+\lambda_3)}} \right\},$$

worin die beiden Integrale wieder elliptisch sind.

Im Anschluss hieran wollen wir gleichzeitig die Gleichung für die kürzesten Linien auf dem Rotationsparaboloid feststellen. Unser elliptisches Paraboloid

$$\frac{y^2}{(p+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(p+\lambda_1)(q+\lambda_1)} - \frac{2x}{p+\lambda_1} - 1 = 0$$

geht in ein Rotationsparaboloid über, sobald in seiner Gleichung $q = p$ wird. Um zu untersuchen, welche Änderung für diesen Fall unsere Gleichung 9) erfährt, wollen wir vorübergehend $q = p - \omega$ setzen, wo ω eine gegen die Null convergierende kleine Grösse bedeutet. Nach den Festsetzungen des ersten Abschnitts liegt λ_2 zwischen $-p$ und $-q$, im vorliegenden Fall also zwischen $-p$ und $-(p-\omega)$. Wir können also

$$\lambda_2 = -(p - \omega \cdot \sin^2\varphi)$$

setzen; dann wird

$$p + \lambda_2 = p - p + \omega \cdot \sin^2\varphi = \omega \cdot \sin^2\varphi$$
$$q + \lambda_2 = p - \omega - p + \omega \cdot \sin^2\varphi = -\omega \cdot \cos^2\varphi$$
$$d\lambda_2 = 2\omega \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \, d\varphi;$$

mithin

$$\frac{d\lambda_2}{\sqrt{-(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} = \frac{2\omega \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \, d\varphi}{\omega \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} = 2\,d\varphi.$$

In der Gleichung 9) wird also jetzt das erste Integral

$$\int d\lambda_2 \cdot \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\lambda_2+\beta)(p+\lambda_2)(q+\lambda_2)}} = \int \sqrt{\frac{\lambda_1+p}{(\beta-p)}} \cdot 2\,d\varphi = 2 \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1+p}{\beta-p}} \cdot \varphi.$$

In dem zweiten Integral werden $(p+\lambda_3)$ und $(q+\lambda_3)$ einander gleich. Wir erhalten also im Falle eines Rotationsparaboloids für die kürzesten Linien die Gleichung

$$13)\quad \text{Const.} = 2\sqrt{\frac{\lambda_1+p}{\beta-p}} \cdot \varphi + \int \frac{d\lambda_3}{p+\lambda_3} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\beta}}.$$

Das hier noch vorkommende Integral läfst sich durch einen Logarithmus und einen Kreisbogen darstellen. Setzen wir zu dem Ende

$$\sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\beta}} = y$$

also

$$\lambda_3 = \frac{y^2\beta + \lambda_1}{1-y^2}$$
$$p + \lambda_3 = \frac{p + \lambda_1 + y^2(\beta - p)}{1-y^2}$$
$$d\lambda_3 = \frac{(1-y^2)\cdot\beta \cdot 2y\,dy + (y^2\beta+\lambda_1)\,2y\,dy}{(1-y^2)^2} = 2y\,dx\,\frac{\beta+\lambda_1}{(1-y^2)^2},$$

so wird das Integral

$$\int \frac{d\lambda_3}{p+\lambda_3} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\beta}} = \int \frac{2y^2\,dy\,.\,(\beta+\lambda_1)}{(1-y^2)\,[p+\lambda_1+y^2(\beta-p)]} =$$
$$= 2(\beta+\lambda_1)\int \frac{y^2\,dy}{(1-y^2)(a+by^2)},$$

*) Wegen der Ableitung dieser Formel verweisen wir auf Jacobi Dynamik 22. und 28. Vorlesung.

wenn wir zur Abkürzung

$$p + \lambda_1 = a;\ \beta - p = b$$

ſetzen. b iſt hierbei als eine poſitive Gröſse zu denken, da nach Seite 15) $\beta > -\lambda_2$, alſo im vorliegenden Fall $> p$ iſt.

Der Bruch $\frac{y^2}{(1-y^2)(a+by^2)}$ läſst ſich in die beiden Partialbrüche $\frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{1-y^2} - \frac{1}{a+b} \cdot \frac{a}{a+by^2}$ zerlegen, ſo daſs wir alſo erhalten

$$\int \frac{y^2 dy}{(1-y^2)(a+by^2)} = \frac{1}{a+b}\left[\int \frac{dy}{1-y^2} - a\int \frac{dy}{a+by^2}\right] =$$
$$\frac{1}{a+b} \cdot \left[\frac{1}{2}\Big/ e\left|\frac{1+y}{1-y} - \sqrt{a:b}\,.\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right.\right].$$

Wenn wir für y, a und b die alten Werte wieder einführen, hat dieſer Ausdruck die folgende Geſtalt:

$$\frac{1}{\beta + \lambda_1}\left[\frac{1}{2}\Big/ e\left|\frac{\sqrt{\lambda_3+\beta}+\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_3+\beta}-\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}} - \sqrt{\frac{p+\lambda_1}{\beta-p}}\,.\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\beta}}\cdot\sqrt{\frac{\beta-p}{p+\lambda_1}}\right)\right.\right].$$

Die Gleichung 13) können wir alſo jetzt ſo ſchreiben:

14) $$\mathrm{Conſt} =$$
$$= \Big/ e\left|\frac{\sqrt{\lambda_3+\beta}+\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_3+\beta}-\sqrt{\lambda_3-\lambda_1}} + 2\sqrt{\frac{p+\lambda_1}{\beta-p}}\left[\varphi - \mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3+\beta}}\cdot\sqrt{\frac{\beta-p}{p+\lambda_1}}\right)\right]\right.$$

Nebenbei ſei bemerkt, daſs für das Rotationsparaboloid auch mit Hilfe von rechtwinkeligen oder von Polarcoordinaten die Gleichung der Projektion der kürzeſten Linien auf die yz — Ebene leicht auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.

Zum Schluſſe wollen wir noch eine Subſtitution erwähnen, durch welche es möglich iſt, die Gleichung der kürzeſten Linien auf dem elliptiſchen Paraboloid trigonometriſch auszudrücken. — Es vereinfacht die Unterſuchung weſentlich, wenn wir dafür die Gleichung der Oberfläche in der Form

$$15)\quad F \equiv \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{pq} - \frac{2x}{p} - 1 = 0;\ p > q,$$

vorausſetzen. Die fragliche Subſtitution gewinnen wir leicht aus den Gleichungen 19) des I. Teiles, wenn wir in denſelben $\lambda_1 = 0$ ſetzen. — Da $p + \lambda_2$ poſitiv iſt und λ_2 zwiſchen $-p$ und $-q$ liegt, ſo bleibt $\frac{p+\lambda_2}{p-q}$ für alle Werte von λ_2 ein poſitiver echter Bruch. Wir können alſo dafür $\cos^2\varphi$ ſetzen; $p + \lambda_3$ aber durchläuft alle Werte von 0 bis $-\infty$, es läſst ſich alſo dafür eine neue Variabele $-r^2$ ſubſtituieren. Mit Hilfe dieſer beiden Subſtitutionen

$$16)\quad \begin{aligned} \frac{p+\lambda_2}{p-q} &= \cos^2\varphi \\ p + \lambda_3 &= -r^2 \end{aligned}$$

laſſen ſich yzx als Funktionen von φ und r darſtellen. Zunächſt ergiebt ſich

$$17a)\quad y^2 = p\,.\,\cos^2\varphi\,.\,r^2.$$

Weiterhin iſt

$$q + \lambda_2 = (p-q)\cos^2\varphi - (p-q),$$

alſo

$$\frac{q + \lambda_2}{p - q} = -\sin^2\varphi$$

$$q + \lambda_3 = -r^2 - (p - q),$$

ſo daſs alſo

17b) $$z^2 = q \cdot \sin^2\varphi\,(r^2 + p - q)$$

$$2x = -[p + (p - q)\cos^2\varphi - r^2 - (p - q)],$$

oder

17c) $$2x = r^2 - q - (p - q)\cos^2\varphi$$

wird.

Um dieſe Subſtitutionen zu erproben, um alſo zu zeigen, daſs durch Einführung der beiden neuen Variabelen r und φ die Differentialgleichung der kürzeſten Linien auf dem elliptiſchen Paraboloid ſich wirklich auf eine Quadratur zurückführen läſst, gehen wir von der für alle Oberflächen geltenden Differentialgleichung der kürzeſten Linien

18) $$-\frac{XdX + YdY + ZdZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dX \cdot dx + dYdy + dZdz} + \frac{d^2s}{ds} = 0,$$

aus, worin X, Y, Z die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ bedeuten. Man findet dieſe Gleichung in Stegmann's Variationsrechnung S. 216, in Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung S. 174 u. a.

Es ſind in derſelben der erſte und der letzte Bruch vollſtändige Differentiale, der mittlere wird es auch für Flächen zweiter Ordnung. Speciell für unſer Paraboloid iſt

$$X = \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2}{p};\quad Y = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{p^2};\quad Z = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{pq},$$

alſo

$$dX = 0;\quad dY = \frac{2}{p^2}\,dy;\quad dZ = \frac{2}{pq}\,dz.$$

Mithin wird

$$\frac{dX \cdot d^2x + dY \cdot d^2y + dZ \cdot d^2z}{dX \cdot dx + dY \cdot dy + dZ \cdot dz} = \frac{\frac{2}{p^2}\,dy \cdot d^2y + \frac{2}{pq} \cdot dz\,d^2z}{\frac{2}{p^2} \cdot dy^2 + \frac{2}{pq}\,dz^2} =$$

$$= \frac{dy \cdot d^2y + \frac{p}{q}\,dz \cdot d^2z}{dy^2 + \frac{p}{q}\,dz^2}.$$

Dieſes iſt augenſcheinlich ein vollſtändiges Differential. Setzen wir vorübergehend den Nenner des Bruches $= N^2$, den ganzen Bruch alſo $= \frac{dN}{N}$ und den Nenner des erſten Bruches in Gleichung 18) $= H^2$, ſo können wir ſtatt dieſer letzteren Gleichung ſchreiben

$$-\frac{dH}{H} - \frac{dN}{N} + \frac{d^2s}{ds} = 0,$$

welche durch Integration liefert

$$\int_e H + \int_e N - \int_e ds = \text{Conſt},$$

oder

$$\frac{H^2 \cdot N^2}{ds^2} = C.$$

Nach Einſetzung der Werte von H, N und ds erhalten wir als erſtes Integral von 18)

$$\frac{4}{p^2}\left[1+\frac{y^2}{p^2}+\frac{z^2}{q^2}\right]=C\cdot\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dy^2+\frac{p}{q}dz^2},$$

oder

$$19)\quad 1+\frac{y^2}{p^2}+\frac{z^2}{q^2}=C\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dy^2+\frac{p}{q}dz^2},$$

wenn wir $\frac{C\cdot p^2}{4}=C$ ſetzen.

In dieſe Gleichung haben wir nun die Subſtitutionswerte 17) einzuſetzen, zu welchem Zweck wir zunächſt die Differentiale ausdrücken müſſen. Es iſt

$$2y\,dy=2p\cdot\cos^2\varphi\cdot r\cdot dr-2p\cdot r^2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi$$
$$y\,dy=p\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot(\cos\varphi\,dr-r\cdot\sin\varphi\,d\varphi),$$

alſo

$$y^2dy^2=p^2\cos^2\varphi\cdot r^2\cdot(\cos\varphi\,dr-r\cdot\sin\varphi\,d\varphi)^2$$

und

$$dy^2=p\cdot(\cos\varphi\,dr-r\cdot\sin\varphi\,d\varphi)^2.$$

Ebenſo findet ſich

$$dz^2=\frac{q}{r^2+p-q}\cdot[\sin\varphi\cdot r\,dr+(r^2+p-q)\cos\varphi\,d\varphi]^2$$
$$dx^2=[r\,dr+(p-q)\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi]^2.$$

Wenn wir die angedeuteten Quadrate ausführen und dann dieſe drei Ausdrücke addieren, ſo erhalten wir

$$dx^2+dy^2+dz^2=$$
$$\left[r^2+p\cdot\cos^2\varphi+\frac{q}{r^2+p-q}\cdot\sin^2\varphi\cdot r^2\right]dr^2+$$
$$+[(p-q)^2\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi+p\cdot r^2\cdot\sin^2\varphi+q\,(r^2+p-q)\cos^2\varphi]\,d\varphi^2+$$
$$+2r\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,[p-q-p+q]\,dr\cdot d\varphi.$$

Hier iſt nun der Coefficient des doppelten Produkts identiſch $=0$. Der Coefficient von dr^2 lautet, wenn man die Glieder auf denſelben Nenner bringt und $\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi$ ſetzt,

$$[r^4+r^2p+(p-q)\,r^2\cos^2\varphi+p\,(p-q)\cos^2\varphi]\,\frac{1}{r^2+p-q}.$$

Die Klammer läſst ſich aber in zwei Faktoren zerlegen, nämlich in die Faktoren

$$(r^2+p)\,(r^2+(p-q)\cos^2\varphi).$$

Der Faktor von $d\varphi^2$ giebt, wenn man ordnet und durchweg den sin durch den cos ausdrückt:

$$pr^2-(p-q)\,r^2\cdot\cos^2\varphi+(p-q)\,p\cdot\cos^2\varphi-(p-q)^2\cos^4\varphi.$$

Dieſer Ausdruck zerfällt in die beiden Faktoren

$$[p-(p-q)\cos^2\varphi]\;\;[r^2+(p-q)\cos^2\varphi].$$

Führen wir der Überſicht halber folgende Abkürzungen ein:

A)
$$R=r^2+p;\qquad V=r^2+(p-q)\cos^2\varphi;$$
$$\Phi=p-(p-q)\cos^2\varphi;\qquad\Delta=r^2+p-q;$$

wo zu bemerken ist, dafs R und Φ nur je eine Variabele enthalten, dann können wir für die Quadratsumme der Differentiale schreiben

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= R \,.\, V \,.\, \frac{dr^2}{\triangle} + V \,.\, \Phi \,.\, d\varphi^2.$$

Ferner ist

$$dy^2 + \frac{p}{q}\, dz^2 = \left[p \,.\, \cos^2\varphi + \frac{p}{r^2 + p - q} \sin^2\varphi \,.\, r^2\right] dr^2 +$$
$$+ \left[p r^2 \,.\, \sin^2\varphi + p\,(r^2 + p - q)\cos^2\varphi\right] d\varphi^2,$$

da die doppelten Produkte einander aufheben.

Wenn man wieder den sin durch den cos ausdrückt und dann vereinigt, so erhält man

$$dy^2 + \frac{p}{q}\, dz^2 = \frac{p}{r^2 + p - q}\left[r^2 + (p - q)\cos^2\varphi\right] dr^2 + p\left[r^2 + (p - q)\cos^2\varphi\right] d\varphi^2,$$

oder unter Benutzung der Abkürzungen A)

$$dy^2 + \frac{p}{q}\, dz^2 = p \,.\, V\left[\frac{dr^2}{\triangle} + d\varphi^2\right].$$

Schliefslich haben wir noch $1 + \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{q^2}$ auszudrücken. Wir finden dafür

$$1 + \frac{\cos^2\varphi \,.\, r^2}{p} + \frac{\sin^2\varphi \,.\, (r^2 + p - q)}{q} =$$
$$= \left[p q + q r^2 \,.\, \cos^2\varphi + p r^2 \,.\, \sin^2\varphi + p\,(p - q)\sin^2\varphi\right] \frac{1}{pq} =$$
$$= \left[p^2 + p r^2 - r^2 \,.\, \cos^2\varphi\,(p - q) - p\,(p - q)\cos^2\varphi\right] \frac{1}{pq} =$$
$$= \left[p - (p - q)\cos^2\varphi\right]\left[p + r^2\right] \,.\, \frac{1}{pq} = \frac{1}{pq} \,.\, \Phi \,.\, R.$$

Nunmehr haben wir an Stelle der Gleichung 19) die folgende:

$$\frac{1}{pq} \,.\, \Phi \,.\, R = C \,.\, \frac{R \,.\, V \,.\, \frac{dr^2}{\triangle} + V \Phi \,.\, d\varphi^2}{p \,.\, V \,.\, \left[\frac{dr^2}{\triangle} + d\varphi^2\right]},$$

oder

$$20) \qquad \Phi R = C \,.\, \frac{R \,.\, \frac{dr^2}{\triangle} + \Phi\, d\varphi^2}{\frac{dr^2}{\triangle} + d\varphi^2},$$

worin die neue Constante gleich der alten mal q ist. Ordnet man diese Gleichung, so kommt

$$\left[\Phi \,.\, R - C \,.\, R\right] \frac{dr^2}{\triangle} + \left[\Phi \,.\, R - C\Phi\right] d\varphi^2 = 0,$$

oder

$$R\left(\Phi - C\right) \frac{dr^2}{\triangle} + \Phi\left(R - C\right) d\varphi^2 = 0,$$

und daraus endlich

$$21) \qquad \frac{R}{R - C} \cdot \frac{dr^2}{\triangle} + \frac{\Phi}{\Phi - C}\, d\varphi^2 = 0,$$

worin die Variabelen getrennt ſind. In Betreff der Conſtanten C bemerkt man, daſs ſie zwiſchen R und Φ liegen muſs. Es ſind nämlich R, Φ, $\triangle$, dr^2 und $d\varphi^2$ alle poſitiv, folglich muſs $R - C > 0$; $\Phi - C < 0$ ſein; das Umgekehrte iſt wegen der Bedeutung von R und Φ nicht möglich. Folglich iſt $R > C > \Phi$.

Integriert liefert Gleichung 21):

$$\int dr \cdot \sqrt{\frac{R}{(R-C)\triangle}} = \pm \int d\varphi \cdot \sqrt{\frac{\Phi}{C-\Phi}} + C',$$

wo C' die neu einzuführende Conſtante bedeutet.

Durch Wiedereinführung der Werte für R, Φ, $\triangle$ erhalten wir ſchlieſslich

22) $$\int dr \cdot \sqrt{\frac{r^2+p}{(r^2+p-C)(r^2+p-q)}} = \pm \int d\varphi \sqrt{\frac{p-(p-q)\cos^2\varphi}{C-p+(p-q)\cos^2\varphi}} + C'.$$

Dieſes iſt die der Gleichung 9) entſprechende Gleichung der kürzeſten Linien auf dem elliptiſchen Paraboloid. Die beiden Integrale ſind im allgemeinen elliptiſche.

Für den Specialfall $C = q$ werden zwar beide elementare Integrale, jedoch wird das zweite dann imaginär. — Für den Fall $C = p$ werden beide Integrale gleichfalls elementar, aber auch reell:

$$\int \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{r^2+p}{r^2+p-q}} = \pm \frac{1}{\sqrt{p-q}} \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \cdot \sqrt{p \cdot \sin^2\varphi + q\cos^2\varphi} + C'.$$

Für $r = 0$ wird das erſte dieſer Integrale unendlich und folglich muſs es auch das zweite werden, d. h. es müſſen die beiden Punkte

$$r = 0, \qquad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

dieſer geodätiſchen Linie angehören. Dieſe beiden Punkte ſind aber die Nabelpunkte des Paraboloids. Die geometriſche Bedeutung des vorliegenden Specialfalles iſt alſo die, daſs die betrachtete geodätiſche Linie durch einen der Nabelpunkte geht.

VITA.

Geboren bin ich, Ferdinand Groscurth, am 21. December 1859 zu Unterhaun, Kreis Hersfeld im ehemaligen Kurfürſtentum Heſſen; meine Confeſſion iſt die evangeliſche. Den erſten Unterricht erhielt ich in der Elementarſchule meines Heimatsortes; von meinem 9. Jahre ab beſuchte ich die höhere Bürgerſchule zu Hersfeld und von Oſtern 1876 ab das Realgymnaſium zu Eiſenach. Von dieſer Anſtalt Oſtern 1878 mit dem Zeugnis der Reife entlaſſen, ſtudierte ich in München und Leipzig je 3 und in Marburg 2 Semeſter Mathematik und Naturwiſſenſchaften. Ich hörte die Vorleſungen der Herren Profeſſoren und Docenten in München: Dres. Baeyer, Carrière, Cornelius, Frohſchammer, Huber, v. Jolly, Meſſmer, Zittel; in Leipzig der Herren Dres. Bruhns, Hankel, Hermann, Klein, Mayer, v. d. Mühll, Schreiber, Voigt, E. Wiedemann, Zöllner; in Marburg der Herren Dres. Bergmann, Dunker, Feuſſner, Greeff, Heſs, Klocke, Melde, Wigand. In Leipzig arbeitete ich auſserdem im phyſikaliſchen Inſtitut bei Herrn Prof. Dr. Hankel. Im November 1882 beſtand ich in Marburg das Examen pro facultate docendi in der Mathematik und den Naturwiſſenſchaften und abſolvierte von Oſtern 1883 bis dahin 1884 am Gymnaſium und Realprogymnaſium zu Hersfeld das pädagogiſche Probejahr. Oſtern 1885 wurde ich an den Unterrichtsanſtalten des Kloſters St. Johannis zu Hamburg zunächſt proviſoriſch, von Oſtern 1886 ab definitiv, angeſtellt.